PROCESE POISSON

& 1 : IPOTEZE SI NOTATII

Se considera o populatie S , formata din " unitati ": in legatura cu aceste unitati , se urmareste producerea unui eveniment A .
Acest eveniment se produce in timp , in mod imprevizibil , cu respectarea ipotezelor de tip probabilistic enumerate mai jos.

GRUPUL 1 : ipoteze generale

- 1: pana la momentul t = 0 , in populatia S , evenimentul A nu s-a produs deloc ;

- 2: Fie evenimentele :

  $X_{a;b;n}$ = " in intervalul de timp [a , b] , evenimentul A s-a produs de " n ' ori " ;

  $Y_{a,k}$ = " pana la momentul "a" , evenimentul A s-a produs deja de "k" ori " :

  atunci probabilitatea $\mathbf{P} \left\lfloor \mathbf{X_{a;b;n}} \mid \mathbf{Y_{a;k}} \right\rfloor$ nu depinde de "k" .

  OBS: aceasta ipoteza are intelesul ca procesul Poisson " nu are istorie" .

- 3: probabilitatea $\mathbf{P} \left(\mathbf{X_{a;b;n}} \right)$: - nu depinde de "a"
  - depinde de : b – a si de "n" .

  OBS: aceasta ipoteza este echivalenta cu a spune ca procesul Poisson este uniform in timp .

CONSECINTA : datorita potezei (3) , este clar ca probabilitatea ca evenimentul A sa se produca de un numar de ori depinde numai de lungimea intervalului de timp , nu si de momentul inceperii acelui interval de timp .
Mai clar : probabilitatile ca evenimentul A sa se produca de 17 ori de la ora 10 la ora 10 si un sfert ; de la ora 16 la 16 si un sfert ; de la ora 23 la 23 si un sfert, sunt egale intre ele.
Din acest motiv , putem lua in studiu numai intervale de timp care incep , de exemplu , in momentul t = 0.

Deci avem : $\mathbf{P}\left(\mathbf{X}_{a;b;n}\right)=\mathbf{P}\left(\mathbf{X}_{0;b-a;n}\right)$;

Vom nota : $\mathbf{f}_n(\mathbf{t})=\mathbf{P}\left(\mathbf{X}_{0;t;n}\right)$, adica :

f_n (t) = probabilitatea ca in intervalul de timp [0 ; t] , in populatia S , evenimentul A sa se produca de " n" ori .

Continuam prezentarea listei de ipoteze asupra producerii evenimentului A.

- 4: fie T_1 ,T_2 - doua intervale de timp : fie evenimentele

X_1 = " in intervalul de timp T_1 evenimentul A se produce de " n" ori "

X_2 = " in intervalul de timp T_2 evenimentul A se produce de " k" ori "

Atunci :

daca intervalele de timp T_1 ,T_2 sunt disjuncte , atunci evenimentele X_1 , X_2 sunt independente , oricare ar fi valorile n , k .

<u>CONSECINTA</u> : in aceste conditii , avem deci :

$$\mathbf{P}\left(\mathbf{X}_1 \cap \mathbf{X}_2\right)=\mathbf{P}\left(\mathbf{X}_1\right)\cdot\mathbf{P}\left(\mathbf{X}_2\right) .$$

== // // ==

GRUPUL 2 : ipoteze valabile pentru intervale scurte de timp

Fie h > 0 – o valoare foarte mica ; atunci exista o constanta $\lambda > 0$ astfel incat sa avem urmatoarele **:**

- 5: fie evenimentul : X = “ in intervalul de timp (t ; t+h) , evenimentul A se produce o singura data “

atunci : $\mathbf{P\ (X) \approx \lambda \cdot h}$.

- 6: fie evenimentul : Y = “ in intervalul de timp (t ; t+h) , evenimentul A se produce de cel putin 2 ori “

atunci : $\mathbf{P\ (Y) \approx 0}$.

Consecinte : - a) : pentru orice valoare naturala $\mathbf{k \geq 2}$, fixata , avem

P [in intervalul de timp (t ; t+h) , evenimentul A se produce de “k” ori] ≈ 0

- b) : pentru orice valoare naturala $\mathbf{k \geq 2}$, fixata , avem :

P [in intervalul de timp (t ; t+h) , evenimentul A se produce de zero ori] ≈ 1 – λ·h

Vom demonstra aceasta ultima afirmatie :

Fie evenimentele :

A = “ in intervalul de timp (t ; t +h) , evenimentul A se produce 1 data “

B = “ in intervalul de timp (t ; t +h) , evenimentul A se produce cel putin de 2 ori “

C = “ in intervalul de timp (t ; t +h) , evenimentul A se produce de zero ori “

E_k = “ in intervalul de timp (t ; t +h) , evenimentul A se produce de “k” ori “

Ω = evenimentul sigur ; Θ - evenimentul imposibil .

Avem urmatoarele relatii directe :

- $\mathbf{A \cup B \cup C = \Omega}$
- $\mathbf{A \cap B = \Theta \ ; \ B \cap C = \Theta}$
- $\mathbf{B = \bigcup_{k=2}^{\infty} E_k}$;
- $\mathbf{k_1 \neq k_2 \Rightarrow E_{k_1}, E_{k_2}}$ **sunt evenimente incompatibile**

<u>Afirmatia (a) :</u>

$$\mathbf{P(B) \approx 0 \Rightarrow P\left(\bigcup_{k=2}^{\infty} E_k\right) \approx 0 \Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} P(E_k) \approx 0} \ ;$$

dar , pentru o valoare $k_0 \geq 2$ fixata , avem :

$$\mathbf{0 \leq P(E_k) \leq \sum_{k=2}^{\infty} P(E_k) \approx 0} \ , \text{ deci } \mathbf{P(E_k) \approx 0.}$$

Afirmatia (b) :

- conditia (5) se poate transcrie drept $\mathbf{P(A) \approx \lambda \cdot h}$;

- conditia (6) se poate transcrie drept $\mathbf{P(B) \approx 0}$;

- avem :

$$\mathbf{A \cup B \cup C = \Omega \Rightarrow P(A) + P(B) + P(C) = 1}$$

deci : $\mathbf{P(C) = 1 - P(A) - P(B) \approx 1 - \lambda \cdot h}$.

== // ==

& 2 : CALCULUL EXPRESIEI FUNCTIILOR $\{\mathbf{f_n(t)}\}_{\mathbf{n \in N}}$.

Von arata ca , daca ipotezele mentionate sunt respectate , atunci avem

$$\mathbf{f_n(t) = e^{-\lambda \cdot t} \cdot \frac{(\lambda \cdot t)^n}{n!}}$$, pentru orice $\mathbf{n \in N}$ si pentru orice $\mathbf{t > 0}$.

- Cazul n = 0 : avem

$f_0 (t) =$ P[in intervalul de timp (0; t) , evenimentul A se produce de zero ori] .

Fie acum $h > 0$ – o valoare foarte mica : vom studia structura lui $f_0 (t + h)$.

Avem :

$f_0(t+h)$ = P[in intervalul de timp (0; t+h) , evenimentul A se produce de zero ori]

= P[in intervalul $(0;t)\cup(t;t+h)$, evenimentul A se produce de zero ori] =

= P{ [in (0 ; t) , A se produce de zero ori] ∩ [in (t ; t+h) , A se produce de zero ori]} =
= P [in (0 ; t) , A se produce de zero ori] · P [in (t ; t+h) , A se produce de zero ori]

deci :

$$f_0(t+h) \approx f_0(t)\cdot[1-\lambda\cdot h] \quad .$$

Din aceasta relatie , deducem

- a: $$\frac{f_0(t+h)}{f_0(t)} \approx 1-\lambda\cdot h$$

Aplicatie : In cazul unui proces Poisson caracterizat de factorul de avarie $\lambda = 2{,}5$ se cere cresterea relativa a probabilitatii f_0 , daca intervalul de timp creste cu 0,15 secunde .

Continuare : din $\frac{f_0(t+h)}{f_0(t)} \approx 1-\lambda\cdot h$, se deduce :

$\frac{f_0(t+h)-f_0(t)}{h} \approx -\lambda\cdot f_0(t)$, deci , pentru $h\to 0$, gasim :

$$f_0'(t) = -\lambda\cdot f_0(t);$$

De aici , avem :

$$\boxed{\frac{f_0'(t)}{f_0(t)} = -\lambda \text{ ,deci :} \left[\ln f_0(t)\right]' = -\lambda \Rightarrow \Rightarrow f_0(t) = C_0\cdot e^{-\lambda\cdot t}}$$

Pentru determinarea constantei de integrare C_0 , vom considera t = 0 :

- din definitie : $\mathbf{f_0(0)=}$ P [in intervalul (0 ; 0) , evenimentul se produce de zero ori]
  = P (Ω) = 1 ;

- din formula : $\mathbf{f_0(t)=C_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}}$, deducem : $\mathbf{f_0(0)=C_0 \cdot e^{-\lambda \cdot 0}=C_0 \cdot e^0=C_0}$.

Asadar , avem : C_0 = 1 , deci

$$\mathbf{f_0(t)= e^{-\lambda \cdot t} = e^{-\lambda \cdot t} \cdot \frac{(\lambda \cdot t)^0}{0!}} ,$$

deci : afirmatia este adevarata .

- continuare in cursul 2 -