Un operator de turism cumpara 10 locuri intr-un tren , pentru care plateste 80 $.
Aceste locuri le revinde clientilor , sub urmatoarele forme :

- bilete nereturnabile , cu 10 $/buc. ;

- bilete returnabile , cu 15 $/ buc.

La un bilet returnabil , in cazul neefectuarii calatoriei , costul se restituie integral.

Ne propunem sa analizam riscul ca operatorul sa nu-si recupereze investitia facuta. Factorii de risc in acest caz sunt urmatorii :

- numarul "x" de bilete returnabile cerute de cumparatori ( $0 \leq x \leq 10$ )
- procentul " p " de cumparatori de bilete care nu renunta la calatorie :

Ambii acesti factori nu sunt apriori cunoscuti de catre operator

REZOLVARE :

Operatorul : - vinde 10 – x bilete nereturnabile , pentru care incaseaza suma de

$$S_1 = 10 \cdot (10 - x)$$

- vinde " x " bilete returnabile ; dintre acestea

  - p▪x calatoresc efectiv , operatorul realizand o incasare de

$$S_2 = 15 \cdot p \cdot x ,$$

  - ( 1- p)▪ x renunta , ocazionand incasarea zero .

Asadar , suma totala incasata de catre operator este de :

$$E(p, x) = S_1 + S_2 = 10 \cdot (10 - x) + 15 \cdot p \cdot x .$$

Conditia de rentabilitate a afacerii este atunci : $\mathbf{E(p,x) \geq 80}$ .

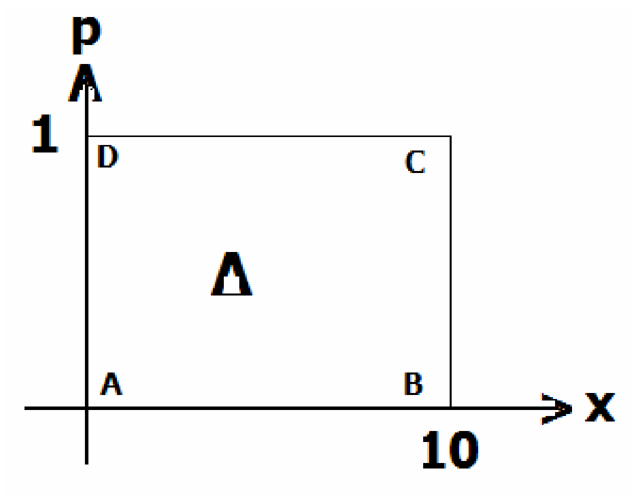
In cazul $\mathbf{E(p,x) \leq 80}$ , operatorul lucreaza in pierdere .

Ecuatia curbei de indiferenta este data de : $\mathbf{E(p,x) = 80}$ , sau , simplificand :

$$\boxed{\mathbf{4 - 2 \cdot x + 3 \cdot p \cdot x = 0}}$$

- <u>Domeniul starilor posibile ale procesului economic :</u> este multimea perechilor de valori p , x admisibile , adica : $\Delta=\{(x,p)|0 \le x \le 10 ; x\in N; 0 \le p \le 1\}$.

Grafic , reprezentarea domeniului **Δ** urmatoarea :




Caracterizarea laturilor domeniului **Δ :**

- latura AB : p = 0 ;
- latura BC : x = 10 ;
- latura CD : p = 1 ;
- latura AD : x = 0.

Vom urmari intersectiile curbei de indiferenta cu laturile domeniului **Δ :**

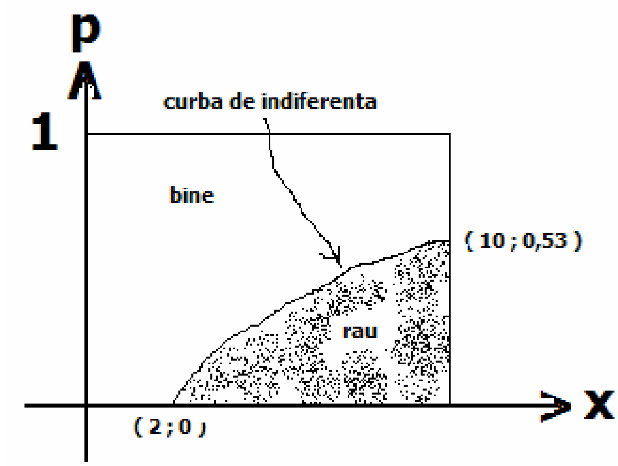
- cu latura AB : p = 0 → x = 2 ; cum x = 2 apartine listei { 0 , 1 , 2 , 3 ,…, 10} , rezulta ca intersectia are efectiv loc ;

- cu latura BC : x = 10 → 150 p – 80 = 0 → p = 0 , 53 ; cum p = 0, 53 apartine intervalului [ 0 ; 1 ] , rezulta ca intersectia are efectiv loc ;

- cu latura CD : p = 1 → 4 + x = 0 ; cum pentru "x" apartinind listei { 0 , 1 , 2 , 3 ,…, 10} , aceasta relatie nu are loc , deducem ca latura CD nu intersecteaza curba de indiferenta.

- cu latura AD : x = 0 → 4 = 0 ; cum aceasta relatie nu are loc , deducem ca latura AD nu intersecteaza curba de indiferenta.

Se obtine urmatoarea situatie :

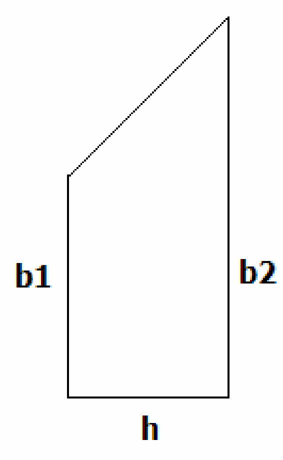



EVALUAREA MASURII MULTIMILOR STARILOR DEFAVORABILE :

Reamintim ca aria unui trapez este data de formula :

$$\text{Aria} = \frac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2}$$

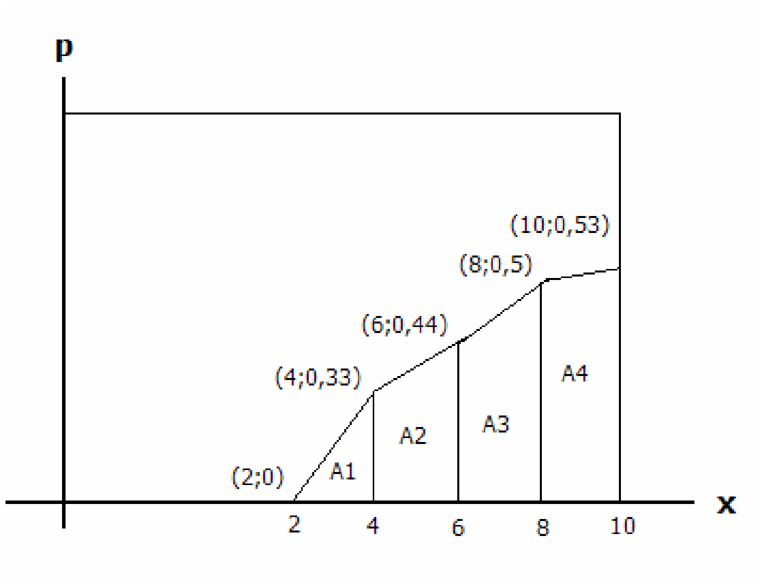
( vezi figura ):




In cazul in care inaltimea trapezului este h = 2 , se obtine :

$$\boxed{\text{Aria} = b_1 + b_2}$$

Vom aproxima aria zonei de pierdere prin suma ariilor de trapeze , duse prin punctele de abscise x = 2 ; x= 4 ; x = 6 ; x = 8 ; x = 10 . In acest caz , aproximam curba de indiferenta prin LPP , ca in figura de mai jos .




Atunci : - $A_1 = 0 + 0,33 = 0,33$ ;

- $A_2 = 0,33 + 0,44 = 0,77$ ;

- $A_3 = 0,44 + 0,50 = 0, 94$ ;

- $A_4 = = 0,50 + 0,53 = 1 , 03$ ,

deci : aria zonei de risc este : $S_{nf} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 3 , 07$ .

FINAL : cum avem aria orizontului economic $\mathbf{S_\Delta = 10}$,

$$\textbf{riscul} = \frac{S_{nf}}{S_\Delta} = \frac{3,07}{10} = 0,307 = 30,7\% \ .$$

**Observare :** daca pentru un bilet returnabil se pretinde suma de 17 $ , refacand calculul precedent , gasim un risc de 27 , 1 % deci – dupa cum era de asteptat –

| |
|---|
| **riscul scade daca adaosul de pret creste** |

STUDIUL ELASTICITATII RISCULUI IN RAPORT CU DIFERENTA DE COST

$\delta =$ ( pretul unui bilet returnabil ) – ( pretul unui bilet nereturnabil).

Exista pericolul ca , in cazul in care $\delta =$ prea mare , numarul de amatori de bilete returnabile sa scada , ceeace modifica drastic tot cadrul problemei .

Este clar ca trebuie sa avem situatiile :

- $\delta = 0 \Rightarrow$ toti calatorii vor prefera bilete returnabile

- $\delta \to \infty \Rightarrow$ nimeni nu va mai cumpara bilete returnabile .

Daca notam cu $\varphi(\delta)$ - procentul de amatori de bilete returnabile , banuit a depinde de marimea lui $\delta$ , avem ( respectand notatiile de la punctul precedent )

$$(1): \quad \boxed{\begin{array}{|l} \bullet \quad x = 10 \cdot \varphi(\delta) \\ \bullet \ \delta = 0 \Rightarrow \varphi(0) = 1 \\ \bullet \ \delta = \infty \Rightarrow \varphi(\infty) = 0 \end{array}}$$

Atunci functia " incasare globala " E , care acum depinde de parametrii " p "

si $\delta$ , va avea aspectul :

$$\boxed{\begin{aligned} E(p,\delta) &= 10 \cdot (10 - x) + \\ &= 10 \cdot [10 - 10 \cdot \varphi \\ &= 100 \cdot [1 - \varphi(\delta) \end{aligned}} \quad (2):$$

In privinta aspectului functiei $\varphi(\delta)$ exista mai multe ipoteze , dintre care vom prezenta doua .

a : - **MODELUL MARKHAM :**

$$\boxed{\varphi(\delta) = \frac{1}{1+\delta}}$$

Evident ca functia Markham respecta conditiile (1) . In cazul de valabilitate a functiei Markham , obtinem

$$E(p,\delta)=100\cdot\frac{\delta}{1+\delta}+10\cdot p\cdot\frac{10+\delta}{1+\delta}\ .$$

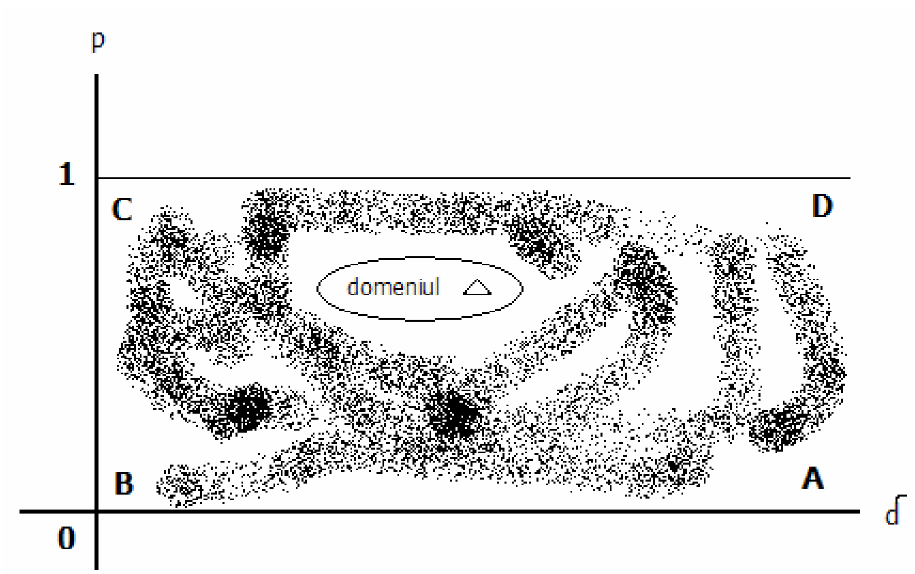
Curba de indiferenta $E(p,\delta)\ =\ 80$ devine :

(3). $$\boxed{2\cdot\delta+10\cdot p+p\cdot\delta=8}$$

Orizontul economic $\Delta$ fiind acum dat de conditiile :

$$\begin{cases}0\ \leq\ \delta<\infty\\ 0\ \leq p\ \leq 1\end{cases},$$

adica :

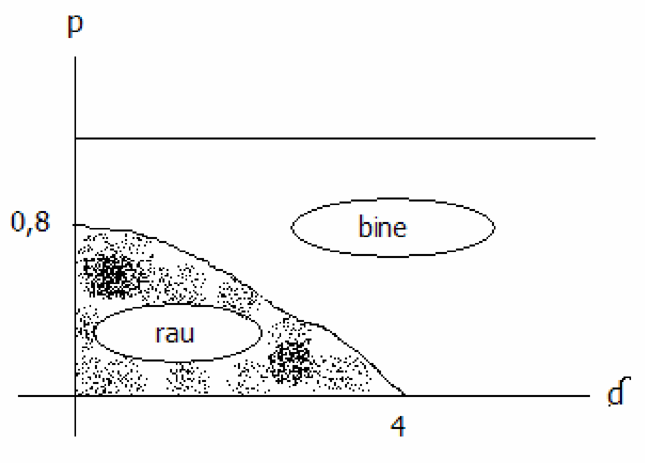



Caracterizarea laturilor :

- <u>latura AB</u> : p = 0 , deci din relatia (3) gasim $\delta=4$ ;
- <u>latura BC</u> : $\delta=0$, deci din relatia (3) gasim p = 0,8 ;
- <u>latura CD</u> : p = 1 , deci din relatia (3) gasim

$$3\cdot\delta+2=0\ \text{- fals .}$$

Se obtine urmatoarea diagrama :




Aria portiunii care corespunde notiunii de “rau” ( nu se acopera cheltuielile ) este folosita ca indicator pentru masurat nivelul riscului .

Folosind valorile intermediare x = 0 ; x = 2 si x = 4 , aproximand aria hasurata cu doua trapeze , gasim

Aria = 1 ,46.

Acest indicator este util numai pentru studii comparative : intrucat aria domeniului **Δ** este infinita , metoda Markham nu permite construirea unei masuri cardinale pentru risc. ( este un indicator ordinal ) .

- b : cazul existentei unui prag psihologic , de exemplu :

<u>daca un bilet returnabil costa dublul unui bilet neretur</u> – <u>nabil , atunci nimeni nu mai cumpara bilete returnabile</u>

In acest caz , conditiile (1) devin :

$$( 4) . \begin{cases} \bullet\ \varphi(\delta) \text{ este functie concava} \\ \bullet\ \varphi(0) = 1 \\ \bullet\ \varphi(10) = 0 \\ \bullet\ \delta > 10 \Rightarrow \varphi(\delta) = 0 \end{cases}$$

Iata doua astfel de functii mai des intilnite ( vezi cursul 1 ):

- $b_1$: modelul liniar : $\varphi(\delta)=\dfrac{10-\delta}{10}$ ;

- $b_2$: modelul patratic : $\varphi(\delta)=\left(\dfrac{10-\delta}{10}\right)^2$ .

<u>Cazul modelului liniar :</u>

Expresia : $E(x,p)=10\cdot(10-x)+(10+d)\cdot p\cdot x$

pentru $x=10\cdot\varphi(\delta)=10\cdot\dfrac{10-\delta}{10}=10-\delta$ , devine :

$$\boxed{E(p,\delta)=-p\cdot d^2+10\cdot d+100\cdot p}$$

Curba de indiferenta are ecuatia : $-p\cdot d^2+10\cdot d+100\cdot p=80$ .
Avem :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| δ = 0 | δ = 2 | δ = 4 | δ = 6 | δ = 8 |
| p = 0,8 | p=0,625 | p=0,476 | p=0,313 | p=0 |

Calculand aria regiunii de pierderi cu ajutorul ariei trapezelor , gasim :

$S_{nf}$ = 3 , 628 ,

deci riscul de 36,28 %.

## REZUMAT :

Cazul abstract : notam

- $k$ = numar de locuri cumparate de catre operatorul de turism
- $C_0$ = pret platit de operator pentru un singur loc ;
- OBS: deci suma totala platita de catre operator este de : $k \cdot C_0$
- $C_1$ = pretul de vanzare a unui bilet nereturnabil
- $C_2$ = pretul de vanzare a unui bilet returnabil

OBS: daca se returneaza un bilet returnabil , se returneaza pretul integral

Fie : $x$= numarul de bilete returnabile cumparate efectiv

$p$ = procentul de cumparatori care nu renunta la calatorie.

Asadar , operatorul :

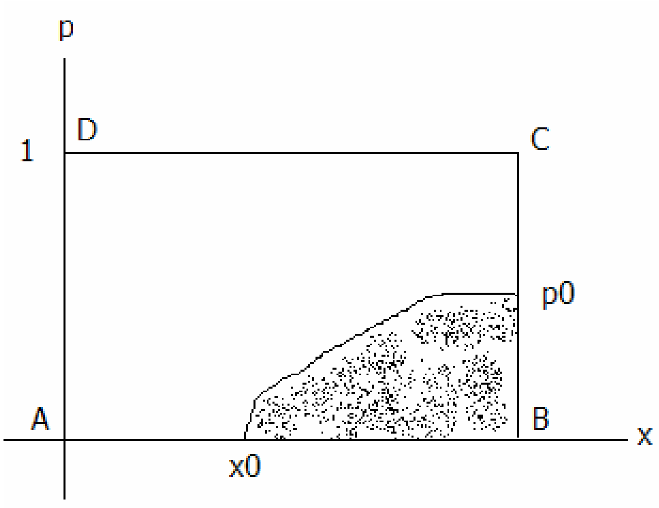
- vinde un numar de : $k - x$ bilete nereturnabile → incaseaza $C_1 \cdot ( k - x )$
- vinde : $x$ – bilete returnabile , din care:
    - $( 1-p) \cdot x$ renunta → nu se incaseaza nimic
    - $p \cdot x$ nu renunta → se incaseaza $p \cdot x \cdot C_2$

Final : incasarea totala este de :

$$\mathbf{E(x,p) = C_1 \cdot (k - x) + p \cdot x \cdot C_2}$$

Curba de indiferenta are ecuatia :

$$C_1 \cdot (k - x) + p \cdot x \cdot C_2 = k \cdot C_0$$




- Intersectia curbei de indiferenta cu latura AB: $p = 0 \rightarrow C_1 \cdot (k-x) = k \cdot C_0 \rightarrow$

$$\boxed{x_0 = \frac{k \cdot (C_1 - C_0)}{C_1}}$$

- Intersectia curbei de indiferenta cu latura AD: $x = 0 \rightarrow C_1 \cdot k = k \cdot C_0 \rightarrow$ fals ( nu se intersecteaza)

- Intersectia curbei de indiferenta cu latura BC: $x = k \rightarrow$

$$\rightarrow \quad \boxed{p_0 = \frac{C_0}{C_2}}$$

OBSERVARE : ecuatia curbei de indiferenta este :

$$\boxed{p = \frac{k \cdot C_0 - k \cdot C_1 + x \cdot C_1}{x \cdot C_2} = \frac{x \cdot C_1 - k \cdot (C_1 - C_0)}{x \cdot C_2}}$$

**<u>Problema aparitiei unui prag psihologic</u>** :

Notam : $d = C_2 - C_1$

- fie : $\varphi$ (d) = procentul celor care prefera bilete returnabile

Asadar , numarul de cumparatori de bilete returnabile va fi :

$$\mathbf{x = k \cdot \varphi (d)}$$

iar numarul de cumparatori de bilete nereturnabile ,

$$\mathbf{k - x = k \cdot ( 1 - \varphi (d) ) .}$$

Functia $\varphi$ (d) trebuie sa indeplineasca proprietatile :

$$\boxed{\begin{cases} \bullet\ \varphi(0) = 1 \\ \bullet\ d \to \infty \Rightarrow \varphi(d) \to 0 \\ \bullet\ \varphi(d) \text{ este functie descrescatoare} \\ \bullet\ \varphi(d) \text{ este functie concava} \end{cases}}$$

Inlocuind expresiile lui “x” si “ k - x” in formula cheltuielilor totale , anume :

$$\mathbf{E(x,p) = C_1 \cdot (k - x) + p \cdot x \cdot C_2} \ ,$$

gasim :

$$\boxed{\mathbf{E(p,d) = k \cdot \left[ (p \cdot C_2 - C_1) \cdot \varphi(d) + C_1 \right]}}$$

OBSERVARE : expresia $\mathbf{\left[ (p \cdot C_2 - C_1) \cdot \varphi(d) + C_1 \right]}$ are sensul de

***<u>“ pret mediu real , incasat pentru 1 loc “</u>***

In fine , inlocuim $\mathbf{C_2}$ cu $\mathbf{d + C_1}$ si gasim expresia finala a incasarii totale ;

$$\boxed{\mathbf{E(p,d) = k \cdot \left\{ \left[ p \cdot d - (1 - p) \cdot C_1 \right] \cdot \varphi ( d ) + C_1 \right\}}}$$

Expresia *pretului mediu real* , incasat pentru 1 loc , devine :

$$\boxed{p_{med} = \left[\, p \cdot d - (1-p) \cdot C_1 \right] \cdot \varphi\,(\,d\,)\ +\ C_1}$$

**MODELUL MARKHAM :** se considera ca avem :

$$\varphi(d) = \frac{1}{1+d}\ .$$

Pentru acest model , gasim :

$$\boxed{E(p,d) = k \cdot \frac{p \cdot (d + C_1) + d \cdot C_1}{1+d}}$$

Pretul mediu real corespunzator va fi deci :

$$\boxed{p_{med} = k \cdot \frac{p \cdot (d + C_1) + d \cdot C_1}{1+d}}$$

**Modelul cu " prag psihologic" :**

Presupunem ca daca $C_2$ este prea mare in raport cu $C_1$ , atunci nici un cumparator nu va accepta sa cumpere bilete returnabile .

Este normal , de exemplu , sa consideram ca :

***daca $C_2$ este mai mare decat dublul lui $C_1$ , atunci vor fi cumparate numai bilete nereturnabile***.

Aceasta ipoteza revine la urmatoarea conditie asupra lui $\varphi(d)$

$$\boxed{d \geq C_1 \Rightarrow \varphi(d) = 0}$$

Iata doua exemple de astfel de functii

- **<u>extinctia liniara</u>** :

$$\varphi(d) = \begin{cases} \dfrac{C_1 - d}{C_1}, \text{ pentru } 0 \leq d \leq C_1 \\ 0, \text{ pentru } d > C_1 \end{cases}$$

- **extinctia parabolica** :

$$\varphi(d) = \begin{cases} \left(\dfrac{C_1 - d}{C_1}\right)^2, \text{ pentru } 0 \leq d \leq C_1 \\ 0, \text{ pentru } d > C_1 \end{cases}$$

Pentru extinctia liniara , gasim :

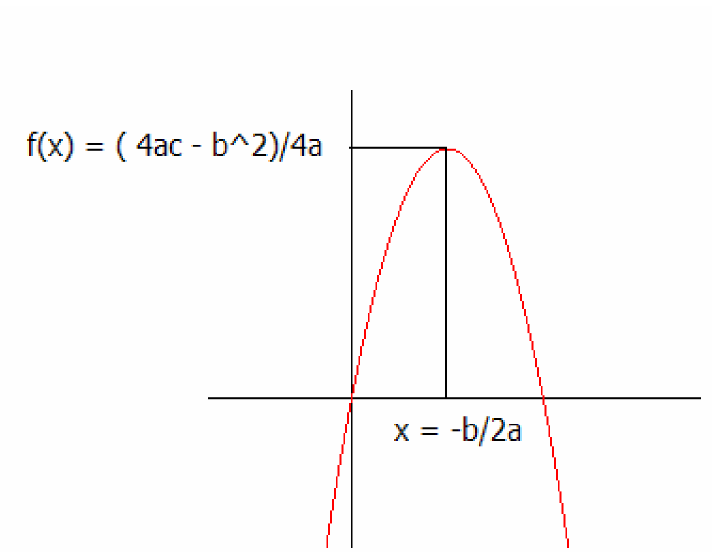
- pretul mediu real : $\quad p_{med} = \dfrac{-p \cdot d^2 + C_1 \cdot d + p \cdot C_1^2}{C_1}$ .

OBSERVARE : fie functia – trinom de gradul 2 ,

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \quad , \text{cu} : a < 0$$

Aceasta functie are un punct de maxim local , de coordonate ;

$$x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a} \quad ; \quad y_0 = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}$$




In expresia $p_{med} = \dfrac{-p \cdot d^2 + C_1 \cdot d + p \cdot C_1^2}{C_1}$ , numaratorul

$$f(d) = -p \cdot d^2 + C_1 \cdot d + p \cdot C_1^2$$

este o functie trinom in raport cu parametrul " d " : aceasta functie inregistreaza o valoare

maxima pentru $d_0 = \dfrac{C_1}{2 \cdot p}$ .

Acest rezultat are semnificatia urmatoare : daca este cunoscuta valoarea procentului " p " de cumparatori care nu renunta la calatorie dupa ce au cumparat bilet , atunci cel mai convenabil este sa vindem biletele returnabile cu pretul

$$C_2 = C_1 + d_0 = C_1 + \frac{C_1}{2 \cdot p} \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = C_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2 \cdot p}\right).$$

Acest cost este numit ***pretul de echilibru .***

Aplicatie : in cadrul modelului Markham , utilizand extinctia liniara , se estimeaza ca procentul de cumparatori care nu renunta la calatorie este de 75%. Stiind ca biletele nereturnabile se

In fine , inlocuind in expresia

$$p_{med} = \frac{-p \cdot d^2 + C_1 \cdot d + p \cdot C_1^2}{C_1}$$ pe "d" cu

$d_0 = \frac{C_1}{2 \cdot p}$ , gasim expresia ***pretului mediu maxim de echilibru*** , anume

$$p_{max} = C_1 \cdot \left(p + \frac{1}{4 \cdot p}\right)$$

Aplicatie : in cadrul modelului Markham , utilizand extinctia liniara , se estimeaza ca procentul de cumparatori care nu renunta la calatorie este de 75%. Stiind ca biletele nereturnabile se